

Micelli, Mónica Lorena; Crespo Crespo, Cecilia Rita
Ábacos de América Prehispánica
Revista Latinoamericana de Etnomatemática, vol. 5, núm. 1, 2012, pp. 159-190
Red Latinoamericana de Etnomatemática
Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274021551007>

RLE
Revista Latinoamericana
de Etnomatemática

Revista Latinoamericana de Etnomatemática,
ISSN (Versión electrónica): 2011-5474
revista@etnomatematica.org
Red Latinoamericana de Etnomatemática
Colombia

Artículo recibido el 1 de diciembre de 2011; Aceptado para publicación el 15 de febrero de 2012

Ábacos de América Prehispánica

Abacus of Prehispanic América

Mónica Lorena Micelli¹
Cecilia Rita Crespo Crespo²

Resumen

En este artículo se realiza una presentación acerca de la existencia y características de los instrumentos de cálculo existentes en América prehispánica. A través de la comprensión de sus modos de aplicación, es posible identificar la manera en la que estas culturas aplicaban técnicas y algoritmos relacionados con los sistemas de numeración utilizados. La mirada de la etnomatemática sobre los ábacos permite tener una visión cultural que reconoce la pluralidad de las construcciones matemáticas a través de las peculiaridades que grupos sociales diversos imprimen sobre la mismas.

Palabras clave: Ábaco, Cálculos, Sistemas de Numeración

Abstract

In this paper, we realize a presentation about the existence and characteristics of calculation instruments at pre-Hispanic America. Understanding its ways application, it is possible to identify the way in which these cultures applied techniques and algorithms related to their numeration systems. The vision of the ethnomathematics about the abacuses allows us to have a cultural glance that recognizes the plurality of mathematical constructions through the peculiarities that diverse social groups print on the same.

Keywords: Abacus, Calculations, Numeration Systems

¹ Maestra en Ciencias, Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”, Buenos Aires, Argentina. Email: monikmathis@gmail.com

² Doctora en Matemática Educativa, Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”, Buenos Aires, Argentina. Email: crcrespo@gmail.com

Introducción

El hombre ha empleado los números expresándolos a través de distintos canales, tanto en forma oral, como también dejando algún tipo de huella en piedras o huesos y culturas más desarrolladas han diseñado una escritura para dejar registros de sus cálculos. El empleo de los números lleva al hombre a operar con ellos, se puede pensar en agregar más cantidades a las ya calculadas de forma tal que se pueda hallar el resultado sin necesidad de seguir la sucesión numérica hasta llegar al número buscado. Actualmente, podemos pensar en realizar esas operaciones con un algoritmo, pero previo a la creación del algoritmo existieron objetos que facilitaban estas operaciones. En los días que corren, donde todo parece estar digitalizado, un resultado se halla rápidamente con una calculadora de bolsillo, pero ¿cuáles fueron los antepasados de nuestras actuales calculadoras? ¿Cómo antiguos pueblos podían realizar sus operaciones? En este trabajo se intentará dar respuesta a estas preguntas describiendo distintos objetos empleados por distintas culturas antes de la llegada de los españoles a América. Objetos que permitieron a cierto grupo específico de cada sociedad tener acceso a estos mecanismos para resolver operaciones, se habla de cierto grupo pues no todo el pueblo tenía acceso a estos saberes como se detallará más adelante en el presente trabajo.

Es evidente que el primer instrumento empleado para realizar cálculos fueron los dedos de las manos u otras partes del cuerpo humano según en qué escenarios se desarrolló ese mecanismo para contar, pues no todos los grupos humanos desarrollaron un sistema decimal. Luego, algunos pueblos crearon una herramienta que les permitiera hallar, con mayor facilidad, el resultado buscado, en cada pueblo estas herramientas tuvieron características y utilidades propias, muy ligadas a sus creencias y cosmovisión del mundo, en algunos casos.

Etnomatemática

La etnomatemática se centra en las variantes culturales que inciden en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

“D’Ambrosio define la etnomatemática como el estudio de las convenciones particulares que diferentes grupos culturales -o etnos- usan para matematizar su medio ambiente. (...)

el vocablo etnomatemáticas tiene las raíces *etno*, contexto cultural; *mathema*, conocer, explicar, entender, y *ties*, arte o técnica. Tal perspectiva permite considerálas como el estudio de la epistemología, de la teoría del conocimiento y de la cognición en un contexto matemático-cultural” (Ortiz, 2004, p.172). La etnomatemática implica, por lo tanto, “una conceptualización más amplia de la matemática, que incluye no solo contar, hacer aritmética y medir, sino también clasificar, ordenar, inferir y modelar” (D’Ambrosio, citado en Parra, 2003, p. 3).

A través de la etnomatemática no solo se analizan los conocimientos matemáticos desarrollados por un determinado grupo, sino que además se examinan otros aspectos como el antropológico, el histórico, geográfico y filosófico que inciden en dicho conocimiento matemático. D’Ambrosio resume a la etnomatemática como “la matemática practicada por grupos culturales” (2001, citado en Jaramillo, 2006, p.2), por lo cual esa matemática desarrollada por un determinado grupo tendrá características especiales asociadas a aspectos propios de dicho grupo. Es así como la etnomatemática, permite investigar las técnicas, habilidades, conocimientos y creencias de aquellos grupos que practican o utilizan la matemática de una forma diferente a la que se transmite en escenarios académicos.

Es desde este enfoque que se analizarán los instrumentos utilizados por distintos grupos étnicos de América, instrumentos utilizados para llevar registro de cantidades o también, para realizar operaciones con dichas cantidades, instrumentos creados y empleados mucho antes de la llegada de los españoles a América, por lo cual se considera de importancia su valoración evitando que queden en el olvido.

Los ábacos

La Real Académica Española entre una de las definiciones que da para el término ábaco, establece que “todo instrumento que sirve para efectuar manualmente cálculos aritméticos mediante marcadores deslizables” (2001). Por lo tanto, estas herramientas empleadas para calcular o contar desarrolladas por diversas culturas de distintas región geográfica de América, se agruparán bajo la denominación de ábacos, analizando sus características propias.

“El término ábaco procede del griego, abax o abakon, que significa ‘superficie plana o tabla cubierta de polvo’; pues en un principio los calculadores utilizaban fichas o pequeñas piedras (calculi) sobre una mesa o una bandeja en la que separaban las zonas

correspondientes a los diferentes órdenes de unidades utilizando líneas que marcaban con polvo” (López, 2008, p.153).

Se han encontrado ábacos en la antigua Roma, China, Japón, y Rusia, pero también en los pueblos que habitaban en América antes de la llegada de los españoles. Algunos nombres más: “en la China se llama suan pan, en el Japón: soroban, en Corea: tschu pan, en Rusia: stchoty, en Vietnam: ban tuan o ban tien, en Turquía: coulba, en Alemania: choreb” (López, 2008, p.153). Los ábacos más conocidos son los de origen chino y ruso, como puede verse en la figura 1, aunque los restos arqueológicos hallados no se asemejan a estos estilos de ábacos modernos sino que son otros muy distintos.



Figura 1. Distintos ábacos³

Antes de la llegada de los españoles a América, los pueblos originarios habían desarrollado conocimientos matemáticos con características propias en cada escenario, influenciados estos saberes por sus propias creencias. A continuación se han seleccionado algunas culturas donde puede observarse el uso de algún instrumento para la realización de cálculos o registro de cantidades.

Nepohualtzintzin, ábaco maya

Los mayas ocuparon el territorio desde el sur de México a través de Guatemala, Honduras y parte del Salvador, y se extendieron al sur, llegando a Panamá y al norte hasta la costa mexicana en Pánuco. Con respecto a la matemática tuvieron un gran desarrollo, que puede observarse en los registros del tiempo que llevaron a cabo creando varios calendarios de gran exactitud que implicaban extensas cuentas y cálculos, o también en la precisión que permitió construir sus grandes pirámides, palacios y templos mucho de los cuales se conservan hoy en día protegidos en su mayoría por la selva tropical.

³ Tomado de López (2008)

Para poder comprender la representación de los números en el ábaco empleado por los mayas, es necesario dar una breve explicación sobre su sistema de numeración para luego poder comprender su representación en dicho instrumento. El sistema de numeración maya tenía las siguientes características: era vigesimal (base igual a 20), posicional y empleaban un símbolo para representar la ausencia de valor en una determinada posición, es decir, los mayas, al igual que los indios y chinos, representaron mediante un símbolo la nada, el cero. Para representar estos conocimientos matemáticos desarrollaron tres formas distintas de registrar su sistema de numeración. El primero asociando a cada número del 0 al 19 a un dios y representando dichos números a través del dibujo del cuerpo completo del dios al cual se había asociado dicha cantidad (figura 2).



Figura 2. Sistema numeración maya

Luego simplificaron la representación dibujando solo el rostro del dios asociado, sistema conocido con el nombre de “sistema de cabezas variables” (Figura 3), para luego, en una última representación, simplificar su escritura y pasando a utilizar solamente tres símbolos: un punto con valor 1, una línea con valor igual a 5 y un símbolo (que variaba según el escritor, los más comunes eran una flor o una flor incompleta, o la figura de un caracol con sus respectivas variantes) que representaba al cero. Con estos simples símbolos pudieron expresar cantidades muy altas, muchas veces ligadas con el paso del tiempo, ya que en su Cuenta Larga (una forma de llevar registro del tiempo transcurrido) daban registro de cálculos muy altos (Fedriani & Tenorio, 2004).





















				
0	1	2	3	4
Ahau	Imix	Ik	Akbal	Kan
				
5	6	7	8	9
Chikchan	Kimi	Manik	Lamat	Muluk
				
10	11	12	13	14
Ok	Chuwen	Eb	Ben	Ix
				
15	16	17	18	19
Men	Kib	Kaban	Etnab	Kawak

Figura 3. Sistema maya de cabezas variables⁴

En la figura 4 puede verse los primeros 20 números expresados a través de puntos y líneas, esta escritura igualmente coexistía con la representación de los números a través de las cabezas de los dioses al cual asociaban cada valor. Puede encontrarse esta forma de representación de los números a partir de puntos y líneas tanto en códices (figura 5) como así también en las estelas que consisten en piedras que grababan contando los hechos históricos y astronómicos (figura 6).

⁴ Tomado de Fedriani Martel y Tenorio (2004)

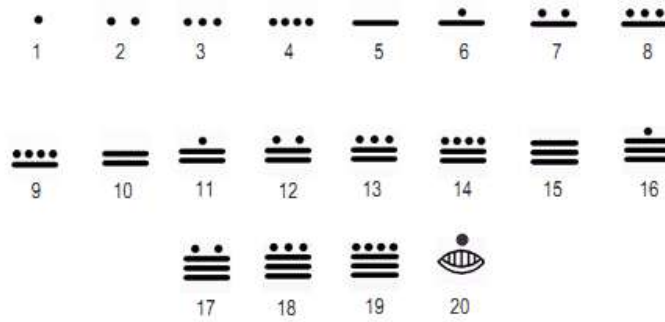


Figura 4. Números mayas del 1 al 20⁵



Figura 5. Códice de Dresde⁶



Figura 6. Estela de Tikal, Guatemala

Para representar números mayores a 20, tenían dos sistemas uno empleado para sus calendarios donde la base era irregular pues para el segundo orden multiplicaban por 18 en

⁵ Tomado de Fedriani Martel y Tenorio (2004)

⁶ Tomado de Fernández Sánchez (2010)

lugar de 20, permitiendo así tener una aproximación a uno de sus calendarios que contaba de 18 meses, de 20 días más la existencia de 5 días, llamados “días nefastos”, lo cual da un total de 365 días. Pero, para su contabilidad, además de los días empleaban un sistema regular donde todas sus bases son 20. Por lo tanto, a continuación, en el cuadro 1, se presenta la interpretación de varios números expresados en su sistema de puntos y líneas.

●	$1 \times 20 \times 20 = 400$
●	$1 \times 20 = 20$
●	1
El número representado es el 421	

● ● ●	$3 \times 20 \times 20 = 1.200$
⊖	$0 \times 20 = 0$
● ● —	7
El número representado es el 1.207	

Cuadro 1. Pasaje de algunos números mayas

En el cuadro 2, puede leerse las denominaciones que daban los mayas para los distintos valores de cada orden de las unidades, vale aclarar que ello tiene que ver con la forma en que ellos realizaban la cuenta larga y los nombres corresponden a los nombres que servían para identificar cada uno de los periodos de tiempo. Para dicha cuenta, vale aclarar que para los Tunes en lugar de realizar 20×20 realizaban 20×18 pues corresponde a su sistema de numeración astronómico, como se explicó más arriba.

Sistema vigesimal	
KINES	$20^0 = 1$
UIINALES	$20^1 = 20$

TUNES	$20^2 = 400$
KATUNES	$20^3 = 8.000$
BAKTUNES	$20^4 = 160.000$
PIKTUNES	$20^5 = 3.200.000$
KALABTUNES	$20^6 = 64.000.000$
KINCHILTUNES	$20^7 = 1.280.000.000$
ALAUTUNES	$20^8 = 25.600.000.000$

Cuadro 2. Sistema vigesimal maya⁷

Este pueblo desarrolló un ábaco, llamado Nepohualtzintzin, con el cual podían realizar las operaciones matemáticas fundamentales. El ábaco podía ser construido con varillas o dibujado en el suelo y utilizando como cuentas, piedras o semillas. “La palabra Nepohualtzintzin viene del Nahuatl y se forma de las palabras; Ne –personal-; pohual o pohualli –la cuenta-; y tzintzin –pequeños elementos semejantes. Y su significado completo se toma como; cuentas de pequeños elementos semejantes por alguien” (García, 2009). La interpretación esencial que comunica este nombre es: “La persona que tiene el conocimiento de la cuenta de la simplicidad de la armonía para trascender al origen de la creación” (Lara & Sgreccia, 2010, p.26).

Como se puede observar en la figura 7, la parte superior de cada varilla presenta tres cuentas representando cada una cinco unidades, mientras que en la parte inferior solo hay cuatro cuentas, cada una de ellas igual a la unidad. Las cuentas sólo tenían valor cuando estaban apoyadas en la barra o línea central. La cantidad de varillas empleadas por los Mayas era un total de 13 lo cual permite expresar números muy altos, vale recordar que el 13 tenía un significado muy especial para este pueblo y en este caso hace referencia a una escalera ascendente de 13 escalones. Pero además, encontrando 7 cuentas en cada varilla da un total de 91 cuentas que representa a una estación del año pues 91 es una cuarta parte del año, además su doble (182) corresponde al ciclo del maíz (Romero, 1986).

⁷ Tomado de Tejón (2007)

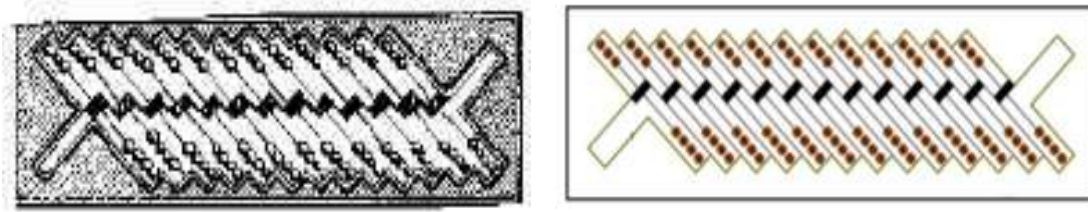


Figura 7. Nepohualtintzin⁸

“El redescubrimiento del Nepohualtintzin se debe al maestro David Esparza Hidalgo quien en sus correrías por todo el país ha encontrado diversos grabados y pinturas de este instrumento y ha reconstruido varios hechos de oro, jade, incrustaciones de concha, etc. Se han encontrado Nepohualtintzin muy antiguos que se atribuyen a la cultura Olmeca, e incluso algunos de pulsera de origen Maya, así como una diversidad de formas y materiales en otras culturas” (García, 2009, párr. 5).

Este instrumento fue luego empleado por los mexicas y los aztecas pueblos que tomaron muchos de los conocimientos del pueblo maya.

Algunas Códices y pinturas, muestran que estos pueblos construyeron estos ábacos en sus diseños de brazaletes y collares. (Figura 8)



Figura 8. Diseño de un brazalete⁹

Cada semilla del lado izquierdo representa una unidad, a medida que se asciende se representan potencias sucesivas de la base a partir de exponente 0 y hasta llegar al exponente 12 de la base 20 en la fila superior. Cada semilla del lado derecho representa 5 unidades. Las operaciones que permite resolver este instrumento son suma, resta, multiplicación, división y raíz cuadrada.

Este instrumento es una muestra del gran desarrollo matemático y tecnológico que el pueblo maya alcanzó y que no fue percibido por los españoles a su llegada.

⁸ Tomado de Tejón (2007)

⁹ Tomado de Tejón (2007)

Marcadores en Teotihuacan

Los restos de la ciudad de Teotihuacan se encuentran en el noreste del valle de México, ciudad que fue habitada en la época de esplendor de los Mexicas. En Teotihuacan no solo pueden encontrarse las pirámides del Sol o de la Luna, sino importantes murales. Pero con lo que respecta a los ábacos, tema central de este trabajo puede decirse que en 1994, se encontraron, en un sector del piso en la plataforma U de la Pirámide del Sol, una serie de grabados que fueron conocidos bajo el nombre de “marcadores” o “cruces punteadas” (Figuras 9 y 10). En total se encontraron en este sector: 28 esquemas labrados y 18 diseños punteados. Estos esquemas se los conoce desde 1964, pero ignorándose su utilidad, aún habiendo encontrado alrededor de 70 de ellos en distintas regiones cercanas.



Figura 9. Primer marcador encontrado en Teotihuacan (1964)¹⁰



Figura 10: Marcadores de Teotihuacan (1994)¹¹

Los “marcadores” consisten en “en una serie de puntos, cuya secuencia forma diseños geométricos que, en su mayoría, consisten en círculos o cuadrados, algunos muy

¹⁰ Tomado de Morante López (s/f)

¹¹ Tomado de Morante López (s/f)

irregulares, cortados por dos líneas a manera de cruz” (Morante, 1997, p.419). (Figuras 11 y 12).

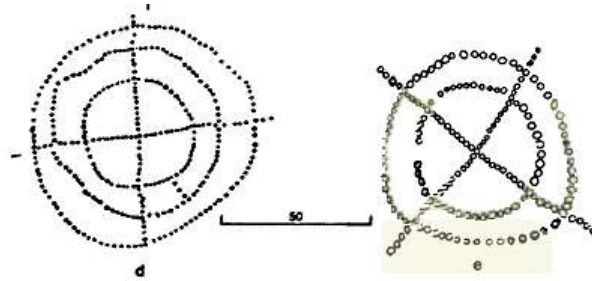


Figura 11: Esquemas de Tepeapulco¹²

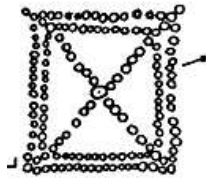


Figura 12. Esquemas de Tlatancaleca¹³

Podría deducirse que estos esquemas tenían un fin funcional más que estético, pero en un principio las hipótesis que se planteaban eran diversas: como tablero de algún determinado juego, instrumentos astronómicos o elementos para llevar cálculos, muchas de estas hipótesis son complementarias.

Morante describe cómo los habitantes de la Sierra de Zongolica, quienes aún hablan el náhuatl, empleaban un instrumento que puede asociarse a la idea de ábaco trabajada más arriba.

“Un maestro bilingüe, lo trazó [ábaco] un día en el piso de un camino de tierra. Para ello usó una vara: se trataba de un cuadrado dividido en cuadrantes. En el primer cuadrante una piedrita era una unidad, en el segundo representaba 20 unidades, en el tercero 400 (20 x 20) y en el cuarto 8000 (20 x 20 x 20)” (Morante, 1997, p.423).

Esta vivencia lo llevó a plantear que los esquemas conservados en los pisos de Teotihuacan habrían tenido una razón de ser similar. “Los puntos sirvieron como instrumentos de cómputo. El método de conteo debió consistir en usar el dedo, una vara o una piedrecilla

¹² Tomado de Morante (1997)

¹³ Tomado de Morante (1997)

para pasar de un orificio a otro, lo cual necesariamente debió causar deterioro en los esquemas hechos en pisos” (Morante, 1997, pp.423-426). Otro dato que sirvió para avalar dicha hipótesis fueron las dimensiones de estos esquemas punteados, “ya que la mayoría permanece dentro de las dimensiones en que todos los orificios pueden ser alcanzados por la mano o por una pequeña vara manipulada por una persona ubicada a un lado de la figura” (Morante, 1997, p.426). Registro de esta suposición puede verse en uno de los murales que se encuentra en Teotihuacan, conocido como Tlalocan (Figura 13). En dicha representación pictográfica puede observarse cómo una figura humana posee una varilla y frente a él se encuentran varios puntos marcados (debe recordarse que estas representaciones carecen de perspectiva, por lo tanto todos los dibujos se encuentran en el mismo plano) y junto esta primera persona se encuentra una segunda figura a la cual van dirigidas sus palabras.



Figura 13. Mural de Tlalocan¹⁴

En dicho mural también puede encontrarse otras representaciones que dan la idea de dos personas registrando de alguna forma con lo que podrían llegar a ser piedras o semillas. (Figura 14).



Figura 14. Mural de Tlalocan

¹⁴ Tomado de Morante (1997)

Hay algunos de estos esquemas cuya cantidad de puntos marcados pudo asociarse a ciclos de la luna, eclipses o una aproximación a su calendario de 365 días o a su calendario para rituales de 260 días en total.

Tsoaktli, rosario Tolteca

La matemática como saber que es construido por el hombre se ve influenciada por sus creencias, es así como en la religión de los Toltecas puede encontrarse un instrumento que servía para rezar pero que a su vez no es más que otra forma de llevar un cómputo de las oraciones o frases recitadas. Este rosario se lo conoce en su lengua como Tsoaktli y significa “semilla arrugada” haciendo alusión al material con el cual se lo confeccionaba generalmente aunque se han encontrado algunos realizados con piedras preciosas. Al acto de repasar las cuentas le decían Soso, *repetición*. (Díaz, 2009). Los códices y murales dan evidencia que esta práctica la realizaban los monjes, en las figuras 15 y 16 puede verse el rosario que consta de varias cuentas.



Figura 15. Mural con el rosario tolteca¹⁵



Figura 16. Uso del rosario tolteca¹⁶

¹⁵ Tomado de <http://nepohualtintzin.blogspot.com/2010/04/nepohualtintzin-kipotl-dialectica-del.html>

El rosario estaba elaborado con semilla o piedra semipreciosa de tamaño apropiado para poder ser manipulado con facilidad, estas cuentas estaban agrupadas en conjuntos de 9 y 13 alternadamente (números que pueden asociarse al calendario). Su extensión variaba entre rosarios más cortos o largos pero todos tenían un total de cuentas múltiples de 9 y 13, identificándose con una cuenta mayor que servía para registrar el inicio (Díaz, 2009).

“El rosario tolteca se componía de dos partes que podemos llamar Nagual o ‘interna y Tonal o externa’. El lado nagual era el Mekatl, *hilo*. Simbolizaba lo continuo, lo invisible, la esencia, el alma o, mejor dicho, el potencial de realización que todos poseemos. Filosóficamente, representaba la unidad subyacente a todas las cosas, cuyo nombre era Senteotl, *unidad divina*. Por lo tanto, al pasar el rosario, el practicante usaba el hilo como guía para reunificar su limitada experiencia humana con el ilimitado océano de la Conciencia Cósmica” (Díaz, 2009, párr. 22). (Figura 17).

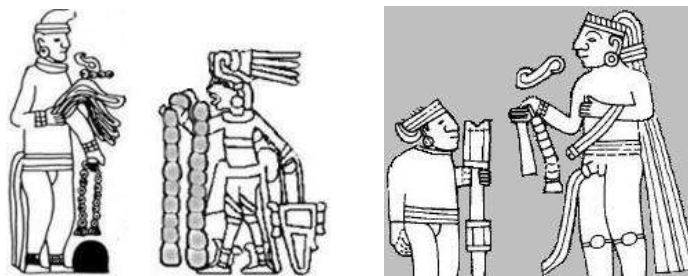


Figura 17. Registros del rosario tolteca¹⁷

Pero más allá de ser un elemento de carácter religioso como pude observarse, este objeto también permitía llevar un cómputo de los días que:

“consiste en repasar 17 trecenas intercaladas con 16 novenas, a fin de completar la duración del año civil (365 días). Según se colige de diversas descripciones de los cronistas, para contar el número de invocaciones, los antiguos colocaban un puñado de granos de maíz e iban quitando uno por cada novena y cada trecena que rezaban” (Díaz, 2009, párr. 40).

Es cierto que este tipo de objetos tuviesen finalidades distintas que el Nepohualtintzin el cual sí permitía realizar no solo cálculos sino también operar con ellos, en cambio el rosario Tolteca, como cualquier otro rosario pues existen en otras culturas además de la de Mesoamérica, solo permite llevar registro para contar.

¹⁶ Tomado de Díaz (2009)

¹⁷ Tomado de Díaz (2009)

Quipu, instrumento incaico

El imperio incaico abarcaba una región tan vasta que cubría la zona desde el norte de Chile y Argentina, a lo largo de la costa del Pacífico, más la región andina hasta el río Mayo, en el sur de Colombia.

Con respecto a su conocimiento matemático, más precisamente a su sistema de numeración, el documento más importante que da registro del mismo son las crónicas de Felipe Guaman Poma de Ayala quien fue uno de los primeros cronistas de la zona. Su obra data de 1615, es así como puede hoy en día saber sobre las costumbres y la cultura incaica. Por ejemplo en la figura 18, puede observarse la utilización de un conjunto de cuerdas, llamados quipus que como veremos fue una forma de registrar sus cuentas y almacenar información, por ejemplo proveniente de censos o conteo de bienes.



Figura 18. Crónicas del uso de quipus¹⁸

Además de los registros gráficos se puede tener acceso a los nombres o vocablos (Figura 19) que empleaban los incas para designar a cada número (Guaman Poma de Ayala en Pacheco, 1999):

¹⁸ Tomado de Guama Poma de Ayala (1992)

SUC	uno
ISCAY	dos
QUINZA	tres
TAUA	cuatro
PICHICA	cinco
ZOCTA	seis
CANCHIS	siete
PUZAC	ocho
YSCON	nueve
CHUNGA	diez
YSCACYCHUNGA	veinte
QUNZACHUNGA	treinta
TAUACHUNGA	cuarenta
PISCACHUNGA	cincuenta
ZOCTACHUNGA	sesenta
CANCHISCHUNGA	setenta
POZACCHUNGA	ochenta
YSCONCHUNGA	noventa
PACHACA	cien
UARANGA	mil
CHUNGAUARANGA	diez mil
HUNO	millón
PACHAHUNO	cien millones
UARANGAHUNO	mil millones
PANTACACHUNO	infinito



Figura 19. Vocablos incas¹⁹

La interpretación es la dada por Pacheco y agrega al respecto:

“vemos que la forma de contar por lo que está escrito, increíblemente llegaron a contar hasta mil millones y lo que admirar tener un nombre para aquella cantidad superior a mil millones. PANTAC o PANTAJJ, cuya palabra primitiva es PANTA que en quechua significa equivocación. Es decir el número es tan grande que, el contador después de los mil millones no tenía otro nombre para utilizar en higiene lo llama el millón que puede hacer equivocar” (1999, p. 38).

Puede observarse que el sistema de numeración empleado por este pueblo tenía una base diez, esta forma de agrupación se puede ver reflejada en su forma de orden social. Al respecto, Struik plantea que:

“la sociología de las matemáticas trata de la influencia de las formas de organización social en el origen y desarrollo de las concepciones y métodos matemáticos. Y del rol de las matemáticas como parte de la estructura social y económica de un periodo” (citado en Pareja, 1986, p.42).

¹⁹ Tomado de Guama Poma de Ayala (1992)

Por ejemplo:

“en la base de la pirámide económico-social del imperio estaba el puric o trabajador raso. Diez de estos purics (una cancha) estaban bajo el mando de un cancha-camayo. Por cada diez cancha-camayos había un pachaca-curaca o capataz. Cada decena de capataces obedecía órdenes de un supervisor. Continuaba la jerarquía con el honoraca o jefe principal de tribu, seguía el gobernador de la provincia y más arriba el mandatario de uno de los cuatro cuarteles en que se dividía el imperio. En la cúspide de la pirámide aparecía la figura omnipotente del Sapa Inca o emperador” (Pareja, 1986, p.42).

Guamán Poma al referirse a los quipu-camayos quienes eran los verdaderos contadores encargados de codificación y decodificación de los quipus (Figura 20), afirma: “Numeran de cien mil, de diez mil, [de mil], de ciento y diez hasta llegar a uno” (citado en Pareja, 1986, p.44). Los quipucamayos eran instruidos desde pequeños en el oficio de descifrar los nudos de las cuerdas y dicho rol tenía un lugar importante entre las clases sociales de este pueblo. Por lo tanto, los quipus eran un registro que permitía conocer el estado de los bienes, riquezas y sobre todo las recaudaciones, razón por la cual Guamán Poma de Ayala escribió en sus crónicas “con los cordeles gobernaban todo el reino” (citado en Pareja, 1986, p.46).

Los quipus no solo permitieron llevar un registro de los bienes sino que además, como sostiene Menninger:

“fue también instrumento de cálculo, al menos en cuanto a la adición se refiere. Se colocaban los sumandos en cuerdas aledañas y la suma se obtenía adicionando en su respectivo orden, unidades, decenas, centenas, etc., teniendo presente que cuando la suma en determinado nivel sobrepasa a diez sólo se anudan las unidades y el resto se lleva al nivel inmediatamente superior (...)” (Pareja, 1986, p.48).



Figura 20. Quipus

El término quipu proviene de Khipu que en quechua significa "nudo". El quipu se encuentra formado por una cuerda principal o transversal (cuerda retorcida de gran grosor) que puede tener una longitud entre 10 cm a 3 m, de la cual se desprende cuerdas más delgadas de distintas longitudes y colores. La longitud de estas cuerdas colgantes pueden llegar a 50 cm y su cantidad puede llegar a cien o más según los datos registrados. Puede ocurrir que de las cuerdas colgantes se desprendan otras secundarias. Las cuerdas estaban hechas de algodón (encontrando ejemplares de este materia en las tumbas de las costa) o lana (de la zona de Tschudi, Cipriani y Cuzco, entre otras). Según las crónicas de los españoles también confeccionaban estas cuerdas con cáñamo o aún empleando metales como hilos de oro o plata, pero no se han encontrado registros arqueológicos que lo verifiquen. Por lo general, las cuerdas colgantes iban con una dirección hacía debajo de la cuerda principal, pero hay ejemplares donde existen algunos cuerdas de menor longitud que tienen una dirección opuesta, es decir, hacía arriba de la cuerda principal. (Radicati, 1951).

Las cuerdas colgantes poseen nudos de formas variadas: nudos simples, dobles o triples, etc. Estos nudos representan los valores de cada cifra del número (Luque, Mora & Torres, 2005). (Figura 21).

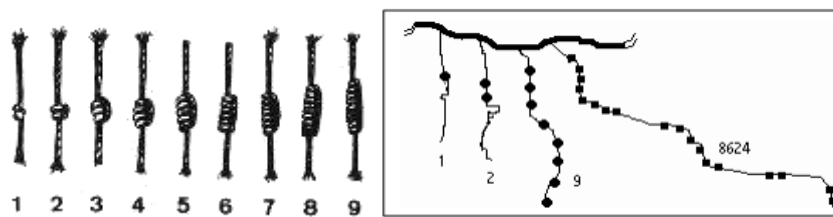


Figura 21. Números en el quipu²⁰

En la cuerda colgante el nudo más próximo a la cuerda principal era el que correspondía al valor mayor del número representado. Luego los grupos que continuaban hacia el extremo inferior de la cuerda representaban cada uno de los dígitos del número. Para distinguir los grupos empleaban distintos tipos de nudo (Figura 22), a saber:

²⁰ Tomado de Luque, Mora & Torres (2005)

Nudo largo con cuatro vueltas: indicaba que el grupo de nudos correspondía al orden de las unidades y se empleaba cuando el dígito de este orden era superior a uno. En ese caso se ponían tantos nudos de estos como indicase el dígito.

Nudo flamenco o en forma de ocho: indicaba también la posición de las unidades, pero indicando que el dígito era el “1”. Por tanto, en las unidades solo aparecía un nudo de este tipo.

Nudo corto o sencillo: era el que se empleaba en las restantes posiciones y se ponían tantos como correspondiese al dígito a representar. (Fedriani & Tenorio, 2004, p.181)

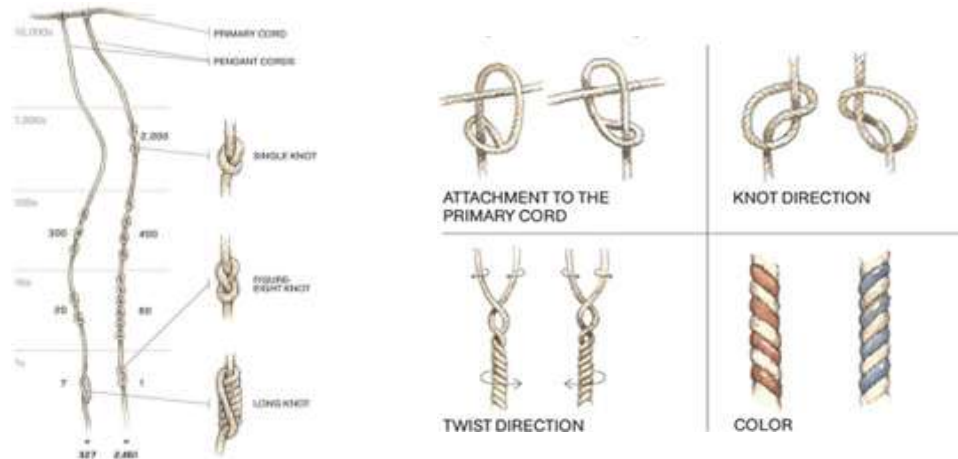


Figura 22: Distintos nudos²¹

En el caso de que el número a representar tenga un cero en algunas de sus cifras, solo era necesario para su registro dejar el lugar vacío en ese grupo de nudos (Figura 23). Por lo tanto, la ausencia de un determinado nivel de nudos implicaba la representación del cero en dicha posición, para lo cual era importante que el espacio que se encontraba entre los grupos de nudos fuese aproximadamente de igual longitud, para así, poder registrar la posición vacía.

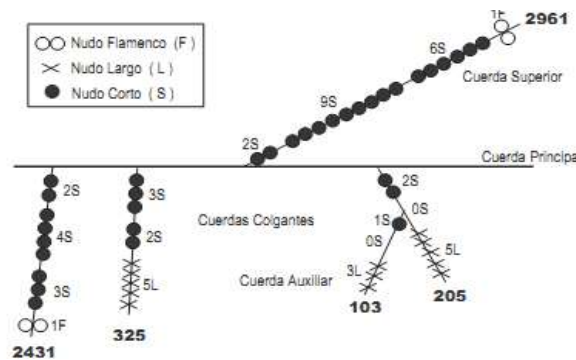


Figura 23. Representación de los nudos²²

²¹ Tomado de Cook (2007)

Además de datos numéricos, los quipus registraban otro tipo de datos, los cuales estaban asociados al color con el cual se teñían cada una de las cuerdas. A continuación se detallan algunos significados que se le otorgaban a ciertos colores, según plantea Radicati (1979):

AMARILLO	representaba el ORO
BLANCO	representaba la PLATA
ROJO	representaba la cantidad de GUERREROS
NEGRO	representaba el TIEMPO
MORADO	representaba al CURACA.
PARDO	representaba al GOBIERNO
VERDE	representaba la CONQUISTA
CARMESÍ	representaba al INCA.

Se ha descrito cómo los incas representaban sus cantidades a partir del uso de cuerdas y nudos, pero este uso no era único de este pueblo. Radicati (1979) comenta que su uso puede hallarse en poblados rurales de la China y que su uso es anterior a la invención de la escritura, aunque también se ha encontrado el uso de cuerdas anudadas en poblados de África occidental y Europa.

Yupana, ábaco incaico

Pero los incas no solo hacían uso del quipu para llevar sus registros, sino que para sus cálculos usaban la yupana como complemento del quipu. “El término yupana se origina en la palabra quechua «yupay» que significa contar” (Pareja, 1986, p.50). Guaman Poman de Ayala ha dejado registro de la yupana también en sus crónicas, como puede verse en la figura 24.

²² Tomado de Fedriani & Tenorio (2004)



Figura 24: Yupana y quipu²³

En la obra de Velasco, de mediados del siglo XIX, se describe este ábaco inca como “instrumento usado para esos menesteres era algo así como unos depósitos hechos de madera, de piedra o de barro, con diversas separaciones, en las cuales se colocaban piedrecillas de distintos tamaños, colores y figuras angulares” (Pacheco, 1999, p.41).

Otra representación de la yupana la encontramos esta vez, no de la mano de los españoles sino en una vasija inca (Figura 25). La escena graficada representa “un desfile de personas que transportan con solemnidad un tablero de grandes proporciones, en cuya superficie están delineados veinte casilleros (5x4), de los cuales la mayoría tiene dos puntos en su extremidad superior” (Pacheco, 1999, p.49).

Pero aún teniendo registro gráfico o verdaderas yupanas (Figura 26) se sabe muy poco en cómo, realmente, los incas utilizaban este ábaco. Al respecto, el padre José de Acosta, otro cronista del siglo XVI, dice: “los indios toman sus granos y ponen uno aquí, tres acullá, ocho no sé dónde; luego pasan un grano de aquí, truecan tres de allá, y así salen con su cuenta” (Pacheco, 1999, p.40). En una clara referencia a la utilización de la yupana:

“Pues verles otra suerte de quipos que usan de granos de maíz es cosa que encanta. Porque una cuenta muy embarazosa, en que tendrá un muy buen contador que hacer por pluma y tinta, para ver a cómo les cabe entre tantos, tanto de contribución, sacando tanto de acullá y añadiendo tanto de acá, con otras cien retartalillas, tomarán estos indios sus granos y pornán uno aquí, tres acullá, ocho no sé dónde; pasarán un grano de aquí, trocarán tres de acullá, y en efecto ellos salen con su cuenta hecha

²³ Tomado de Guaman Poma de Ayala (1615)

puntualísima, sin errar un tilde; y mucho mejor se saben ellos poner en cuenta y razón de lo que cabe a cada uno de pagar, que sabremos nosotros dárselo por pluma y tinta averiguado” (De Acosta, citado por Joseph, 1991, pp.69-70)

Este texto muestra la admiración ante la utilización de la yupana y los resultados que se obtenían del mismo.



Figura 25. Representación en una vasija²⁴

Sobre su uso, Garcilazo de la Vega planteó:

“[L]os contadores, delante del curaca y del gobernador Inca, hacían las cuentas con piedrezuelas y las sacaban tan ajustadas y verdaderas que no sé a quién se pueda atribuir mayor alabanza, si a los contadores, que sin cifras de guarismos hacían sus cuentas y particiones tan ajustadas de cosas tan menudas, que nuestros aritméticos suelen hacer con mucha dificultad, o al gobernador y ministros regios, que con tanta facilidad entendían la cuenta y razón que de todas ellas les daban” (De la Vega citado en Radicati, 1979, p.269).

Se han encontrado tableros tanto en territorios ecuatorianos y peruanos hechos en piedra y algunos otros en madera (Figura 27). Radicati los describe de la siguiente manera:

“(…) tablero de madera de forma rectangular (33 x 27 cm) en cuya cara superior hay 17 compartimientos, de los cuales 14 con cuadrados, 2 rectangulares y 1 octagonal.” Además en el centro se encontraba un espacio con forma octogonal, mientras que en las esquinas “hay unas salientes prismáticas en forma de torres cuadradas (12 x 12 cm) con dos plataformas superpuestas; la segunda de estas plataformas, que es la más pequeña (7 x 7 cm), se asienta sobre uno de los ángulos exteriores de la primera” (Radicati, 1979, p.272).

También se han encontrado tableros de arcilla y hueso, aunque son los menos comunes.

²⁴ Tomado de Radicati (1951)

²⁴ Tomado de Pareja (1986)



Figura 26. Yupana²⁵

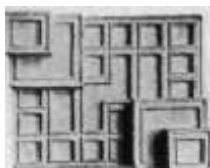


Figura 27. Distintas vistas de una yupana²⁶

Sobre estos objetos hay distintas hipótesis, tres de ellas son: estos elementos fueron maquetas arquitectónicas que fue la primera idea que surge a fines del siglo XIX al encontrar los primeros tableros; luego se pensó que servían como verdaderos ábacos para realizar los cálculos. La última de las hipótesis (siglo XX) hace referencia a que su uso puede estar asociado a juegos de azar llevados a cabo sobre estos objetos, basándose en la simetría de los tableros y suponiendo dos jugadores enfrentados (Pacheco, 1999; Radicati, 1979). Sobre esta idea del juego, conocido bajo el nombre quechua de taptana, algunos antropólogos plantean que originalmente surgen estos tableros para el juego de azar y que luego derivan en tableros para contar. Al respecto Radicati plantea que:

“de todos los tipos de taptanas, el que mejor se presta para la finalidad contable es el más simple, o sea aquel formado por casillas del mismo tamaño, distribuidas uniformemente en sentido vertical y horizontal; en otros términos, un tablero que puede ser confeccionado fácilmente con rayas trazadas sobre una plancha de madera (...)” (1979, p.285).

Volviendo al dibujo de Guamán Poma de Ayala, la yupana está representada por un tablero de 20 casillas distribuidas en 5 filas y 4 columnas, donde en cada columna hay una determinada cantidad de círculos. En la primera se presentan 5 círculos, mientras que en las

²⁵ Tomado de Pareja (1986)

²⁶ Tomado de Radicati (1979)

restantes columnas se puede observar, 3, 2 y 1 respectivamente. Puede observarse además que estos círculos poseen dos colores, suponiendo que los círculos blancos representan hoyos vacíos, mientras los oscuros, hoyos ocupados por elementos como granos o piedras. Esta representación es similar a la encontrada en la vasija inca, aunque vale destacar que los objetos encontrados construidos en distintos materiales, poseen una ubicación distinta de las casillas presentando, algunos de ellos, distintos niveles, en las esquinas. Por otro lado, además de estos tableros, se han encontrado representaciones sobre piedra haciendo alusión a delimitaciones de cuadrículas. Ejemplo de ello fue la encontrada en la tumba de Huancarcuchu, en el alto Ecuador, (figura 28) donde en una de sus caras puede verse grabada este damero que tiene forma escalonada. Otro ejemplo de estos dameros, es la piedra una piedra de unos 38 cm por 25 cm que en su parte inferior tiene grabados dos cuadrados de 9 cuadrados menores, cada uno.

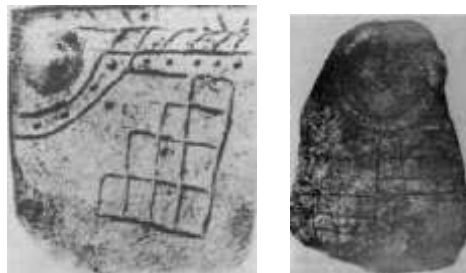


Figura 28. Tablero en piedra²⁷

Sobre la base de los registros de las crónicas de los primeros españoles, solo se sabe que los incas realizaban cuentas con estos instrumentos, que movían piedras o semillas pero no se sabe realmente cómo realizaban esas operaciones, razón por la cual existen varias interpretaciones sobre los posibles cálculos realizados sobre el soporte de la yupana. Existen diversas teorías acerca de la manera en la que se utilizaba ese instrumento, a través de interesantes explicaciones e interpretaciones.

Una de las primeras interpretaciones es la hipótesis que desarrolla Wassén (Figura 29), en la cual las casillas donde se encuentran 5 círculos valen cada uno 1, en la siguiente casilla, donde se encuentran 3 círculos, cada uno vale 5, mientras que en las otras dos casillas,

²⁷ Tomado de Radicati (1979)

donde se presentan 2 y 1 círculo, valen 15 y 30 respectivamente. Para ello, considera que los círculos dibujados por Guamán Poma de Ayala, el cronista representa la cantidad máxima en cada casillero. Además, a cada fila le asigna una potencia de 10, el siguiente esquema representa cada valor por fila y columna (Pacheco, 1999).

				10^4
				10^3
				10^2
				10
				1
1	5	15	30	

Figura 29. Interpretación de Wassén

A continuación se muestran dos formas de representar el número 147 según el modelo planteado por Wassen (Figura 30):

				10^4
				10^3
				10^2
				10
				1
1	5	15	30	

				10^4
				10^3
				10^2
				10
				1
1	5	15	30	

Figura 30. Representaciones del número 147 según Wassen

Puede observarse que no hay una única forma de representar el mismo número lo cual fue criticado por otros antropólogos.

Varias interpretaciones coinciden en darle valores a cada fila como potencias de 10, lo que varía es el valor asignado a los círculos de cada columna. Es así como Radicati (en Pacheco, 1999), propone que los valores de las columnas sean 5, 3, 2 y 1 de izquierda a derecha, ubicando un solo círculo en cada casilla (Figura 31).

○	○	○	○	10^4
○	○	○	○	10^3
○	○	○	○	10^2
○	○	○	○	10
○	○	○	○	1
5	3	2	1	

Figura 31. Interpretación de Radicati

Volviendo al ejemplo anterior, para representar bajo esta interpretación, el número 147 se haría (Figura 32):

				10^4
				10^3
			●	10^2
	●		●	10
●		●		1
5	3	2	1	

Figura 32. Representación del número 147 según Radicati

En la interpretación de Burns Glynn, presenta la yupana como se muestra en la figura 33, invertida en comparación de las interpretaciones anteriores. En este caso, los puntos señalados en cada columna valen la potencia de 10 que corresponde a la columna donde se encuentre ubicado, empezando por la columna de la izquierda, donde cada punto vale 1 (Luque, Mora & Torres, 2005). Por lo tanto, cada columna representa a las unidades, decenas, centenas, etc.

10^4	10^3	10^2	10	1

Figura 33. Interpretación de Burns Glynn

Continuando con el mismo ejemplo el número 147, según esta nueva interpretación sería (Figura 34):

10^4	10^3	10^2	10	1

Figura 34. Representación del número 147 según Burns Glynn

Sobre cada uno de estos modelos se han desarrollado explicaciones de los distintos procedimientos para resolver cálculos que involucren: la adición como la sustracción, así como también el producto y la división. Cada uno de estos procedimientos varían según la forma de representación del número al cual se acuerda.

Grupos originarios de Venezuela

En el trabajo de Sánchez se hace referencia a un instrumento, denominado Wekuí, utilizado por grupos étnicos de Venezuela para llevar registro del calendario, para ello usaban una cuerda que presentaban nudos, lo cual puede asociarse al principio empleado en la construcción de los quipus por los incas. En esta comparación, vale destacar que estos instrumentos no poseen cuerdas secundarias como sí poseían los quipus. El primero en describirlos fue Koch Grüemberg, etnógrafo que visitó Venezuela a principio del siglo XX, dejando registro que fueron confeccionados con hojas de palma tejida. La principal función

de los Wekuí era llevar registro de los días en un viaje, simplemente atando o desatando nudos (Figura 35).



Figura 35. Wekuí del siglo XX²⁸

En el año 1989, Sánchez pudo comprobar que estos instrumentos aún se seguían utilizando en la comunidad de Wonken, al sur de Venezuela. La cuerda tenía una extensión de 61 cm y presentaba 29 nudos, correspondiente a los días del mes lunar.

Además en los registros antropológicos de principio del siglo XX se ha encontrado en diferentes pueblos aborígenes de Venezuela de la utilización de palos con muecas que empleaban para contar, denominado Vikuy, además del uso de los Wekuí (Sánchez, 2009).

Consideraciones finales

Existen varios trabajos donde se intenta recuperar estos objetos que permitieron realizar los cálculos en el pasado a los pueblos originarios de América para ser llevados al aula como un recurso didáctico, a fin de valorar los conocimientos de la etnomatemática. Además algunos de estos recursos permiten el trabajar en forma concreta el concepto de posicional de nuestro sistema, en el caso del sistema inca no habría dificultades pues posee la misma base que nuestro sistema, pero el empleo del ábaco maya requiere un pasaje de base para poder expresar cantidades en base 20. En la actualidad, en varios países, como por ejemplo Guatemala desde el 2004 se ha incluido, por ley, en los contenidos de la educación básica la enseñanza del sistema maya, pues un gran porcentaje de la población forma parte de estos grupos o son descendientes del pueblo maya. Es así como uno puede encontrar en las paredes de un aula, en la actualidad, el sistema maya (Figura 36).

²⁸ Tomado de Sánchez (2009)



Figura 36. Aula de Antigua, Guatemala, 2010

Para finalizar este trabajo se tomarán las palabras de D’Ambrosio quien plantea:

“Las distintas maneras de hacer (prácticas) y de saber (teorías), que caracterizan una cultura, son parte del conocimiento compartido y del comportamiento compatibilizado. Así como comportamiento y conocimiento, las maneras de saber y de hacer están en permanente interacción. Son falsas las dicotomías entre saber y hacer, así como entre teoría y práctica” (D’Ambrosio, 2008, p.19).

Referencias

- Cook, G. (2007). *Untangling the Mystery of the Inca*. Recuperado de: http://www.wired.com/wired/archive/15.01/khipu.html?pg=1&topic=khipu&topic_set=
- D’Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.
- Díaz, F. (2009). *El Rosario tolteca*. Recuperado de: <http://www.templotolteca.com/tse/sp/articulos/rosario.html>
- Fedriani, E. & Tenorio, A. (2004). Los sistemas de numeración maya, azteca e inca. *Lecturas Matemáticas*. 25(2), 159-190.
- Fernández, O. (2010). Pensamiento matemático de los Mayas, una creación metafórica. *Entre Ciencia e Ingeniería*, 4(8). 174 – 188.
- García, O. (2009). *Ábaco Azteca*. Recuperado de <http://abacoazteca.ucoz.com/blog/2009-06-21-81-987>.
- Guaman Poma de Ayala, P. (1992). *Nueva crónica y buen gobierno*. México: Siglo Veintiuno.

Micelli, M- L. & Crespo, C. R. (2012). Ábacos de América prehispánica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 5(1). 159-190

Jaramillo, D., Torres, B. & Villamil, M. (2006). *Interacciones en clase de matemáticas: una mirada desde la etnomatemática*. Foro Educativo Nacional 2006. Colombia. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articulos-110337_archivo.pdf

Joseph, G. (1991). *La cresta del pavo real*. Madrid: Pirámide.

Lara, G. & Sgreccia, N. (2010). Nepohualtzitzin: un modelo matemático de cualidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 3(2). 24-54.

López, S. (2008). Ábaco. *Revista Unión*. 14, 153 – 156.

Luque, C., Mora, L. y Torres, J. (2005). *Didáctica de sistemas de notación de los números naturales*. Recuperado de: <http://www.usergioarboleda.edu.co/semicirculo/documentos/didacticanumnaturales.pdf>

Morante, R. (1997). ¿El ábaco Teotihuacano? *Estudios de cultura Náhuatl*. 27, 419 – 433.

_____. (s/f). *El ábaco Teotihuacano. Una Luz equinoccia sobre Teotihuacan*. Recuperado de: <http://www.arqueoastronomia.com.mx/contenido/Profesionales/prof2-%201.html>

Ortiz, L. (2004). Prolegómenos a las etnomatemáticas en Mesoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7 (2), 171- 185.

Pacheco, O. (1999). *Del Quipu a la yupana : el computador ancestral*. Serie Etnogeometría para la etnomatemática N° 2. Bolivia: Editorial Cepdi.

Parra, A. (2003). *Acercamiento a la etnomatemática*. Tesis de licenciatura no publicada, Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia.

Pareja, D. (1986). Instrumentos prehispánicos de cálculo: el quipu y la yupana. *Revista Integración* 4 (1), 37-52.

Radicati, C. (1951). *Introducción al estudio de los Quipus*. Lima, Perú: Sociedad Peruana de Historia.

_____. (1979). *El sistema contable de los Incas: yupana y quipu*. Lima, Perú: Librería Studium.

Real Académica Española (2001). Diccionario de la lengua española. 22º edición, recuperado de http://buscon.rae.es/draeI/SrvltConsulta?TIPO_BUS=3&LEMA=%E1baco

Romero, M. E. (1986). ¿Computadora prehispánica? El Nepohualtzintzin. *Revista Chispa*, 66.

Sánchez, D. (2009). El Sistema de Numeración y algunas de sus aplicaciones entre los Aborígenes de Venezuela. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 2(1). 43-68

Tejón, F. (2007). *Manual de uso del ábaco vigesimal*. Nepohualtzintzin. Ponferrada: Editerio Krayono.