

LOS CÓDIGOS DEL LENGUAJE MATEMÁTICO EN LA GEOMETRÍA EUCLIDEANA

Marisol Radillo Enriquez

Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara
marisol.radillo@red.cucei.udg.mx

México

Resumen. Este artículo reporta la base teórica construida para una investigación cuyo objetivo consistió en identificar los errores relacionados con el lenguaje matemático en la solución de problemas de la Geometría Euclídeana. El estudio se llevó a cabo con estudiantes de licenciatura del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México. En la primera parte del reporte se abordan los términos básicos y los supuestos de investigación. La segunda parte contiene la discusión teórica que llevó a conformar los códigos o conjuntos de normas que rigen las diferentes representaciones lingüísticas utilizadas comúnmente en la Geometría Euclídeana, de acuerdo a las normas institucionales del CUCEI. Finalmente se proponen algunas reflexiones que pretenden ser útiles para profesores y estudiantes de la materia, así como para futuras investigaciones de Matemática Educativa, que aborden la solución de problemas matemáticos desde un enfoque lingüístico.

Palabras clave: lenguaje matemático, representación, geometría, lingüística

Abstract. This paper reports the theoretical basis for an investigation whose objective was to identify errors related to the language of mathematics in solving problems of Euclidean geometry. The study was conducted with undergraduate students of the University Center of Exact Sciences and Engineering (CUCEI) at the University of Guadalajara, Mexico. The first part of the report deals with the basic terms and assumptions of research. The second part contains the theoretical discussion that conforms to codes or sets of rules governing the different linguistic representations commonly used in Euclidian Geometry, according to institutional standards CUCEI. Finally we propose some reflections intended to be useful for teachers and students of the subject, as well as for future investigations of Mathematics Education, addressing the solution of mathematical problems from a linguistic approach.

Key words: mathematical language, representation, geometry, linguistic

Introducción

Aprender a resolver problemas implica adquirir el dominio de los códigos lingüísticos que rigen las diversas formas de representación los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos. Por ejemplo, un teorema de Geometría Euclídeana suele plantearse en forma verbal y para demostrarlo se dibuja la figura correspondiente (representación gráfica) y, en la actualidad, el procedimiento involucra la notación matemática (representación simbólica); los problemas de construcción utilizando regla y compás se resuelven de manera gráfica, aunque en el nivel licenciatura se pide al estudiante que justifique la validez de su respuesta, ya sea en forma verbal y/o simbólica.

No obstante, las producciones escritas de los estudiantes de matemáticas (tareas, exámenes, etc.) ponen de manifiesto deficiencias en el manejo del lenguaje matemático (Radillo y Varela, 2007), mismas que suelen ser catalogadas como diversos tipos de errores. De este tipo de

situaciones surgió el interés por analizar desde un punto de vista lingüístico los errores que cometen los estudiantes en la solución de problemas de Geometría Euclidea, para determinar si éstos se deben exclusivamente al desconocimiento del lenguaje matemático o si involucran además fallas de razonamiento deductivo o aplicación de los teoremas involucrados (axiomática).

El presente trabajo se reporta únicamente la construcción teórica para el análisis lingüístico, que consta de la construcción de los códigos o conjuntos de normas que rigen las diversas formas de representación del lenguaje matemático. Sobre esta base teórica fue posible clasificar los errores relacionados con el lenguaje matemático de acuerdo a las normas quebrantadas, ya fuera de sintaxis, de traducción entre códigos o en la construcción de enunciados (Radillo, 2009).

Lenguaje matemático

Históricamente, los primeros símbolos escritos que surgieron en el ámbito de las Matemáticas fueron los numerales, hace más de 5,000 años en el marco de la civilización sumeria. Posteriormente los griegos del período clásico (600-300 a.C.) utilizaban las representaciones verbal y gráfica, aunque los primeros registros de la notación “algebraica” corresponden a Diofanto de Alejandría y datan del año 250 a. C.; estos símbolos se utilizaban para denotar la incógnita en una ecuación y para señalar la sustracción y la igualdad; con ellos surgió la llamada *álgebra sincopada*, que consistía en una mezcla de símbolos con “palabras” del lenguaje natural. No fue sino hasta el S. XVI que Vyeta introdujo una notación simbólica más estructurada, nuevamente para el Álgebra, misma que a través de los siglos ha evolucionado hasta constituirse en la notación matemática.

En la actualidad, el lenguaje matemático está conformado no solo por la notación simbólica que introdujo Vyeta, pues también incluye los diversos tipos de representación utilizados comúnmente utilizados como el numérico, el verbal y el gráfico o geométrico. Aunque algunos autores se refieren indistintamente al lenguaje numérico, lenguaje geométrico, etc., (Pimm, 1999; Alcalá, 2002), desde el punto de vista lingüístico es más adecuado referirse a las formas de representación lingüística numérica, simbólica, gráfica, etc., que a una diversidad de “lenguajes”. Los autores que trabajan desde la Semiótica, prefieren referirse al registro matemático (Duval, 1998; Font, 2000; Godino, 2003), aunque desde esta perspectiva abordan la cognición en las matemáticas escolares, mas no analizan los textos construidos por los estudiantes ni los errores que éstos cometen en la solución de problemas.

La base teórica de la presente investigación proviene de la Lingüística Aplicada, en la cual se considera que un *lenguaje especializado* está conformado por mucho más que un simple listado de términos técnicos (léxico) creados *ex profeso* para referirse a la temática específica de un campo del conocimiento humano, pues se tienen recursos léxicos, sintácticos, morfológicos y textuales especiales para comunicarse adecuadamente en un contexto profesional determinado (Cabre, s/f). Tal es el caso del *lenguaje especializado de las matemáticas* o *lenguaje matemático*, el cual tiene además el propósito de caracterizar los hechos y las reglas de razonamiento con precisión, así como las relaciones y conexiones entre los objetos matemáticos y sus propiedades.

La ventaja principal de considerar la perspectiva teórica de los lenguajes especializados consiste en que permite especificar la gramática que rige al lenguaje matemático, y en consecuencia se definen los recursos necesarios para su aprendizaje y enseñanza. Por ejemplo, los códigos que se reportan en este trabajo constituyen la base para realizar un análisis lingüístico de las producciones escritas de los estudiantes de Geometría; los resultados del análisis permitieron identificar algunas causas y consecuencias de los errores cometidos por los alumnos y, posteriormente, modificar el diseño instruccional del curso (Radillo, 2009).

Formas de representación en las Matemáticas

El concepto de representación que se utiliza en la Didáctica de las Matemáticas se aproxima a una “señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático, también como signo o marca con el que los sujetos piensan las matemáticas e, incluso, como aquellos esquemas o imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas” (Rico, 2000). En la opinión de Duval (1998), “ningún objeto real” se puede considerar como un representante perfecto de los objetos matemáticos, si se tiene acceso a ellos por medio de la percepción, por lo que es necesario referirse a ellos a través de alguna de sus formas de representación; se necesitan por lo menos dos representaciones diferentes, el lenguaje natural y el lenguaje matemático, para tener una idea de dicho objeto (Duval, 1998).

Representación de las proposiciones matemáticas en la Geometría Euclidea

La representación de objetos y proposiciones matemáticas se aborda desde un punto de vista lingüístico y se centra la atención en las tres formas de representación más comunes en la Geometría Euclidea:

- ❖ Verbal. Consiste en la descripción de un objeto o enunciado matemático, expresado solo en palabras (*español especializado de la geometría euclidea*).
- ❖ Simbólica. Descripción de uno o más objetos matemáticos, sus propiedades y/o

relaciones, expresado solamente con símbolos (notación matemática).

- ❖ Gráfica. Dibujo de uno o más conceptos matemáticos y las relaciones entre ellos. Suele incluir letras que le asignen nombres específicos a la figura.

La relación entre estas tres formas de representación se pone de manifiesto en diferentes tipos de problemas de la Geometría Euclidea. Por ejemplo, el planteamiento de una demostración requiere el pasaje de una representación verbal a sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica.

Los códigos del lenguaje matemático

Las partes de la Lingüística aplicables a los códigos del lenguaje matemático son la sintaxis, el léxico y la morfología (Leal, 2000), por lo que para llevar a cabo el análisis lingüístico de la solución a un problema, se establecieron los códigos lingüísticos para cada tipo de representación utilizada en la materia: simbólica, gráfica y verbal. Estos códigos no fueron creados con propósitos docentes, sino para contrastar las respuestas de los estudiantes con normas estructuradas conforme a la Lógica Teórica y el desarrollo axiomático propio de la Geometría Euclidea.

El código verbal. La construcción del código verbal consistió en (a) una lista de términos geométricos que constituyen el léxico de la Geometría Euclidea, con las normas institucionales que se proporcionan a los estudiantes, y (b) la clasificación de los sustantivos y un listado de adjetivos con los que pueden ser utilizados en la formación de proposiciones y enunciados. Por ejemplo, el adjetivo “perpendiculares” solamente se aplica al sustantivo “rectas”, es decir no se utiliza con otros sustantivos como “puntos” o “círculos” puesto que constituyen un “sin sentido”; el adjetivo “circular” puede ser aplicado a sustantivos tales como “arco”, “sector”, “segmento”, “sección”, “cilindro”, “cono” y “trapecio”. El sustantivo “recta”, en singular, admite la utilización de adjetivos diferentes (oblicua, ‘perpendicular a’, secante, tangente) mientras que su expresión en plural, “rectas” (concurrentes, determinadas, distintas, oblicuas, paralelas, ‘perpendiculares entre sí’).

Aunque los autores de la Didáctica de las Matemáticas se refieren a las “palabras” del lenguaje matemático (Pimm, 1999; Alcalá, 2002), desde el punto de vista lingüístico es preferible referirse a *términos*, los cuales pueden estar compuestos por una o más “palabras”. Por ejemplo, la expresión *ángulos alternos internos* es un término formado por tres “palabras” que al aparecer juntas en ese orden tienen un significado determinado y pueden ser considerados *grosso modo* como “sintagmas nominales”.

Un aspecto importante para la enseñanza de las matemáticas estriba en identificar aquellos términos lingüísticamente complejos, ya que involucran varios conceptos matemáticos y/o condiciones necesarias para operar con ellos. Algunos términos complejos en la geometría son “equidista”, “mediatriz”, “bisectriz”, “circunscrito”, “inscrito”, “media proporcional”, que si bien corresponden a la geometría elemental, su traducción a los códigos simbólico y/o gráfico lleva implícitas determinadas condiciones.

El código simbólico. Otro aspecto del lenguaje matemático que merece especial atención se relaciona con las normas o convenciones no escritas que se tienen en el ámbito escolar, las cuales debilitan el rigor del código simbólico y dan origen a polisemia o ambigüedad. Tal es el caso de escribir $sen2x$, en vez de $sen(2x)$, de uso frecuente en los textos y cursos de cálculo, aunque el hecho de eliminar los paréntesis propicia que el estudiante inexperto interprete de dos maneras diferentes la expresión mencionada a saber: $(sen2)x$ o bien $sen(2x)$ (Díaz, 2006). Este tipo de situaciones conflictivas se solucionan si se conoce el código o conjunto de reglas de sintaxis, semántica y morfología que se utiliza a partir de un léxico dado.

Las normas establecidas para la representación simbólica en la Geometría Euclideana se reorganizaron desde una perspectiva de Lingüística y Lógica Teórica, en base a las reglas aprobadas para su uso por la academia de Geometría Euclideana del CUCEI. El código comienza con la definición de términos, los cuales se clasifican en constantes numéricas y variables individuales tanto en expresiones simples como en las expresiones compuestas. Se finaliza con las reglas de formación de enunciados a partir de las variables individuales. Algunas de las reglas de sintaxis de la representación simbólica en la Geometría Euclideana son las siguientes:

- ❖ A, B, C, ... letras latinas mayúsculas designan puntos (excepto ‘R’ en las expresiones de medidas angulares)
- ❖ α, β, \dots letras griegas representan planos o ángulos (excepto ‘ π ’ en las expresiones de medidas angulares)
- ❖ a, b, c... letras latinas minúsculas con el diacrítico superpuesto ‘ \leftrightarrow ’ representan rectas.
- ❖ AB, CD, PQ... pares de letras latinas mayúsculas representan longitudes.
- ❖ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{PQ}, \dots$ pares de letras latinas mayúsculas con el diacrítico superpuesto ‘ $\overline{\quad}$ ’ representan segmentos de recta.
- ❖ $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{PQ}, \dots$ pares de letras latinas mayúsculas con el diacrítico superpuesto ‘ \leftrightarrow ’ representan rectas.

- ❖ $\zeta \perp \xi$ es enunciado si y sólo si ζ y ξ representan segmentos, rayos, rectas o planos.
- ❖ $\zeta \parallel \xi \parallel \eta$ es enunciado si y sólo si ζ , ξ y η representan segmentos, rayos, rectas o planos.
- ❖ $\zeta \cap \xi = \eta$ es un enunciado si y sólo si ζ y ξ representan segmentos, rectas, rayos o circunferencias y η representa un conjunto de puntos

La reformulación de las reglas de la notación simbólica se hizo con propósitos de investigación, ya que la lista de símbolos y su uso, elaborada por los profesores del CUCEI se hizo como una referencia para unificar el lenguaje, pero no es adecuada para el análisis lingüístico de los textos producidos por los alumnos. Por ejemplo, las reglas para la formación de enunciados simbólicos no se explicitan en tal documento, sino que se proporcionan ejemplos que cada profesor deberá explicar en clase, sin embargo para el análisis y clasificación de los errores detectados en el trabajo de campo es indispensable explicitar todas estas reglas.

El código gráfico. En el ámbito escolar es inusual encontrar el planteamiento de problemas que utilicen solamente el código gráfico, pues este se usa para complementar la información dada en expresiones simbólicas y/o verbales; por esta razón se detecta poco rigor en el cumplimiento de las normas de este código. Un ejemplo muy común es la marca especial de los ángulos rectos, que suele omitirse en los esquemas y se deja a la percepción visual, lo cual es completamente inaceptable en los códigos simbólico o verbal.

Otra dificultad para establecer un código gráfico es la falta de rigor en la representación de los elementos básicos, como la línea recta. En la figura 1 se aprecian tres formas de la representación gráfica de una línea recta. La característica esencial en este caso es la longitud indefinida de una recta, que suele ser representada con puntas de flecha en los extremos (inciso a), aunque no existe una convención universal al respecto; suele añadirse nombre a dos puntos sobre la recta para referirse a ella en los códigos verbal y/o simbólico. En el inciso b la recta se representa con prolongaciones punteadas, aunque dichas prolongaciones también suelen representarse en línea continua después de los puntos marcados sobre la recta.

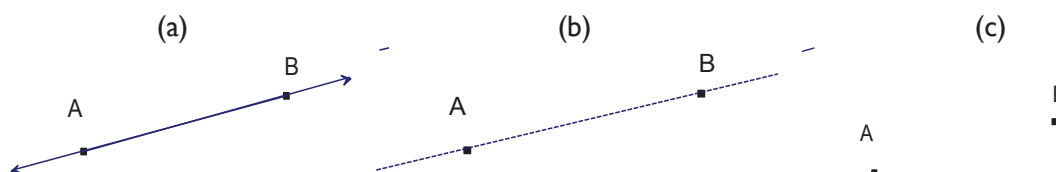


Figura 1. Tres formas equivalentes de representación gráfica de una recta.

El código gráfico se distingue del simbólico y del verbal en que no contiene oraciones en sentido estricto, ya que los trazos no son signos ordenados (n-tuplos de signos), y por ende

pueden ser leídos de diversas maneras. Mientras que las oraciones de los otros dos códigos son conjuntos ordenados de signos que no pueden ordenarse de cualquier manera puesto que se altera su significado, en el código gráfico es más adecuado referirse a “combinaciones” de elementos.

Conclusiones

Aunque el lenguaje matemático es universal, se tienen “variantes dialectales” debidas a que los criterios para algunas notaciones simbólicas o gráficas varían según el grupo social que las ejerce y/o según el texto matemático que se consulte. Se recomienda establecer claramente las normas institucionales que profesores y estudiantes utilizarán durante los cursos, así como dar a conocer las variantes que se encuentran en los libros de texto.

Las normas del español especializado de la Geometría Euclideana son poco conocidas por los estudiantes ya que el código verbal es poco utilizado por ellos para redactar enunciados, quienes suelen utilizar expresiones mixtas (texto acompañado de símbolos y figura) para expresar el procedimiento de solución a los diversos tipos de problemas. Por otro lado se carece de reglas claras para la redacción de la justificación en las demostraciones euclidianas, a diferencia de la Lógica, por lo que cada alumno redacta y abrevia a su modo los argumentos en los que basa sus afirmaciones.

Mediante la construcción de los códigos y los procesos de traducción entre ellos fue posible detectar que la dificultad lingüística para representar en el código simbólico algunos términos complejos del código verbal, tales como “equidista”, “mediatriz”, “bisectriz”, “circunscrito”, “inscrita”, “media proporcional”, “circunscrito”, “inscrita”, “semi-inscrita” y los sintagmas que se forman con ellos en el código verbal ya que les corresponden varias proposiciones en el código simbólico, e incluso en la representación gráfica. La dificultad lingüística de estos términos estriba en su carácter sintético, ya que cada uno de ellos involucra varios conceptos matemáticos y/o condiciones necesarias para operar con ellos. Tal es el caso del sintagma “punto que equidista de los lados de un ángulo” ya que implica saber que la distancia entre un punto y una recta es igual a la longitud del segmento perpendicular que une al punto con la recta o rayo.

En el código simbólico también existen términos lingüísticamente complejos, ya que fue creado para condensar mucha información, y puede obtenerse mucha información de ellos. Por ejemplo, la expresión $\{A, B, C, D\} \subset \odot O$, que, a primera vista, podría traducirse casi de manera literal diciendo que los puntos A, B, C y D están sobre la circunferencia con centro en

el punto O , o que forman un subconjunto de la circunferencia con centro en O , contiene más información implícita que podrá inferirse en el contexto del problema planteado:

- ❖ $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ son radios de la circunferencia con centro en O
- ❖ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}, \overline{BD}, \dots$ son cuerdas
- ❖ $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{DA}$ son rectas secantes a la circunferencia con centro en O
- ❖ $\angle AOC, \angle AOD, \angle BOC, \angle DOC$ son ángulos centrales
- ❖ $\angle ABC, \angle ACD, \angle BDC, \dots$ son ángulos inscritos en la circunferencia con centro en O

Ante tal variedad de proposiciones implicadas por una sola proposición simbólica dada el estudiante debe aprender a interpretar adecuadamente la información relevante para la solución de un problema determinado. Si esta proposición simbólica se interpreta en forma conjunta con otros enunciados simbólicos, o acompañados de una figura, en el contexto de una demostración, la información que se puede obtener sería aún mayor.

La falta de reglas explícitas para la traducción entre códigos hace que la comprensión y manejo de estos términos constituya un obstáculo en la solución de problemas matemáticos. Se recomienda a los profesores elaborar un listado de los términos complejos y explicar a sus alumnos que se requiere de varias proposiciones para expresar el significado matemático completo al ser traducido a los otros códigos, pues una traducción incompleta es una potencial fuente de errores en la solución de problemas.

Para finalizar estas reflexiones cabe mencionar que existen algunos términos del código verbal que carecen de representación gráfica, como lo son las medidas de segmentos o ángulos; otros términos carecen de representaciones gráfica y simbólica, tales como *centro*, *partes homólogas*, *lados proporcionales antecedente*, *consecuente* y deben expresarse de forma mixta, es decir, con una figura que complemente la notación simbólica.

Referencias bibliográficas

- Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao
- Cabre, M. T. (s/f). Recursos lingüísticos en la enseñanza de lenguas de especialidad. Recuperado el 24 de septiembre de 2011 de <http://cvc.cervantes.es/lengua/aeter/conferencias/cabre.htm>
- Díaz, P. (2006). *Lenguaje matemático y lenguaje audiovisual. Dos componentes de los programas de estudio de la enseñanza de la matemática del siglo XXI*. Consultado el 17 de abril de 2008

en: <http://www.uned.ac.cr/MemEncMate/Ponencias/Aspectosteoricos/Lenguaje%20Matem%C3%A1tico%20y%20Audiovisual%20Msc.%20Pedro%20D%C3%ADaz.pdf>

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f(x)$. El caso de la función seno. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas* 25, 21-40.

Godino, J. D. (2003). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática*. Recuperado el 2 de octubre de 2004 de <http://www.ugr.es/local/jgodino/>

Leal C., F. (2000). Diez preguntas sobre el lenguaje, y un intento por responderlas desde una perspectiva principalmente sintáctica. En V. Alcaraz (Coord.), *Una mirada múltiple sobre el lenguaje* (pp. 33-92). Guadalajara: Editorial de la Universidad de Guadalajara.

Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula*. 2ª Edición. Madrid: Ed. Morata.

Radillo, M. (2009). *Obstáculos relacionados con las deficiencias en la traducción entre códigos en la solución de problemas de la Geometría Euclidea en el nivel de licenciatura*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Guadalajara. México.

Radillo, M., Varela, S. (2007). Obstáculos en el aprendizaje de la geometría euclidea, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático, en R. Abrate, y Pochulu, M. (Ed.), *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática* (pp. 263-280). Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. Recuperado el 8 de noviembre de 2005 de: <http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Huelva/LRico.htm>