

HISTORIA Y CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN COSTA RICA (1949-2012)

Leonel Castro, Patricia Cortés, Roberto Guzmán, Noemí Lezcano, Grettel Mora, Natalia Rosales y Miguel Picado

Universidad de Costa Rica (Costa Rica)

leonelm17@gmail.com, patocc.1990@gmail.com, robertoguzmang89@hotmail.com, noemilezcano@gmail.com, grettel19@hotmail.com, nataliarosafer@gmail.com, miguepicado@hotmail.com

Palabras clave: Enseñanza secundaria, investigación histórica, historia, libro de texto

Key words: Secondary education, historical research, history, textbooks

RESUMEN: Se muestran los resultados de un estudio sobre el uso de la historia de la matemática como organizador curricular y eje temático en libros de texto de matemática en educación secundaria en Costa Rica durante 1949-2012. Se ha implementado el Análisis Didáctico como técnica de análisis. Se evidencia las áreas y conceptos matemáticos abordados con mayor frecuencia desde un enfoque histórico en los libros de texto, los sistemas de representación y los contextos utilizados para mostrar estos conceptos matemáticos en los textos. Se establecieron cuatro etapas históricas definidas a partir de acontecimientos políticos, económicos, sociales y educativos que marcan el desarrollo del sistema educativo costarricense.

ABSTRACT: The results of a study on the use of the history of mathematics as organizing curriculum and central theme in textbooks of mathematics in secondary education in Costa Rica during 1949-2012. The training analysis as analysis technique has been implemented. Areas and mathematical concepts addressed most frequently from a historical perspective in textbooks, the systems of representation and contexts used to show these mathematical concepts in texts is evident. Four historical stages defined from political, economic, social and educational events that mark the development of the Costa Rican education system were established.

■ INTRODUCCIÓN

Esta contribución presenta los resultados de un estudio sobre el uso didáctico de la historia de la matemática y las diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos abordados desde una perspectiva histórica en los libros de texto de matemática en educación secundaria en Costa Rica (de los 13 a los 17 años). El período de estudio se extiende desde la fundación de la Segunda República en 1949, hasta la Reforma Curricular implantada por el Ministerio de Educación Pública (MEP) en 2012. Como objetivos específicos se plantean los siguientes: identificar los conceptos con vínculos históricos de la matemática presentes en los textos y determinar los sistemas de representación y contextos utilizados para mostrar conceptos matemáticos asociados a aspectos históricos en estos documentos.

■ ANTECEDENTES HISTÓRICOS

En Costa Rica, la educación secundaria ha vivido diferentes modificaciones y mejoras desde su instauración. En particular, en cuanto a la educación matemática se han dado una serie de cambios a nivel curricular y general, influenciados por diferentes políticas nacionales e internacionales. Por ejemplo, la incorporación de nuevos elementos a los programas de estudio, los cuales antes de 1980 generalmente correspondían a una serie de lineamientos y descripción de los contenidos que se debían incluir en el desarrollo de las lecciones.

Posterior a 1980, en los programas de estudio se replantearon diferentes aspectos como la inclusión de diferentes tópicos a la maya curricular de cada asignatura, además de lineamientos metodológicos que debían contemplarse en cada nivel académico.

Por otra parte, la incorporación de la historia de la matemática dentro de los fundamentos de los programas ha sido parte de estos cambios, pues, aunque en programas anteriores a 2012 se daban indicios sobre la utilización de la historia de la matemática dentro de la enseñanza de la matemática costarricense; es hasta la Reforma Curricular del año 2012 que se comienzan a instaurar lineamientos más claros sobre cómo incorporar la historia de la matemática en el trabajo de aula.

El estudio de los acontecimientos desarrollados durante el período de 1949 a 2012 en la educación costarricense y en particular en la educación matemática, permitió el establecimiento de cuatro etapas históricas que facilitaron una mejor organización de las fuentes a estudiar. Estas etapas son: Etapa I: Etapa de promulgación constitucional (1949 – 1963), Etapa II: Etapa de implementación de las matemáticas modernas (1964 – 1979), Etapa III: Etapa de conceptualización curricular de los procesos de enseñanza y aprendizaje (1980 – 1994) y Etapa IV: Etapa de implementación y reajustes a la conceptualización curricular de los procesos de enseñanza y aprendizaje (1995 – 2012) (Castro, Cortés, Guzmán, Lezcano, Mora y Rosales, 2015).

■ FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Teóricamente, se destacan las ideas de Babini y Pastor (1997), Bell (1992), Boyer (2003) y Fauvel y Gray (1991). Sus propuestas reconocen en la historia un medio para comprender los orígenes y el desarrollo del conocimiento matemático en la sociedad. Permite, además, seleccionar, analizar e interpretar datos y sucesos relacionados con un concepto matemático específico. Integrar la

historia en la práctica didáctica, mediante la reproducción de ambientes históricos o la vinculación de conceptos con su origen, es una estrategia metodológica que permite al estudiante comprender que los errores, dudas y las controversias surgidas durante la apropiación de conceptos matemáticos, son parte integral del desarrollo y contextualización histórica de esta ciencia a lo largo de la historia de la humanidad (Farmaki, Klaudatos y Paschos, 2004). La incorporación del recurso histórico en los procesos de enseñanza-aprendizaje, se manifiesta en los libros de texto y demás recursos didácticos.

En cuanto al libro de texto, se entiende éste como aquella obra literaria con información organizada de una disciplina y con un fin didáctico, que además busca responder a las necesidades educativas de la sociedad y que responde al currículum del sistema educativo (Picado, 2012).

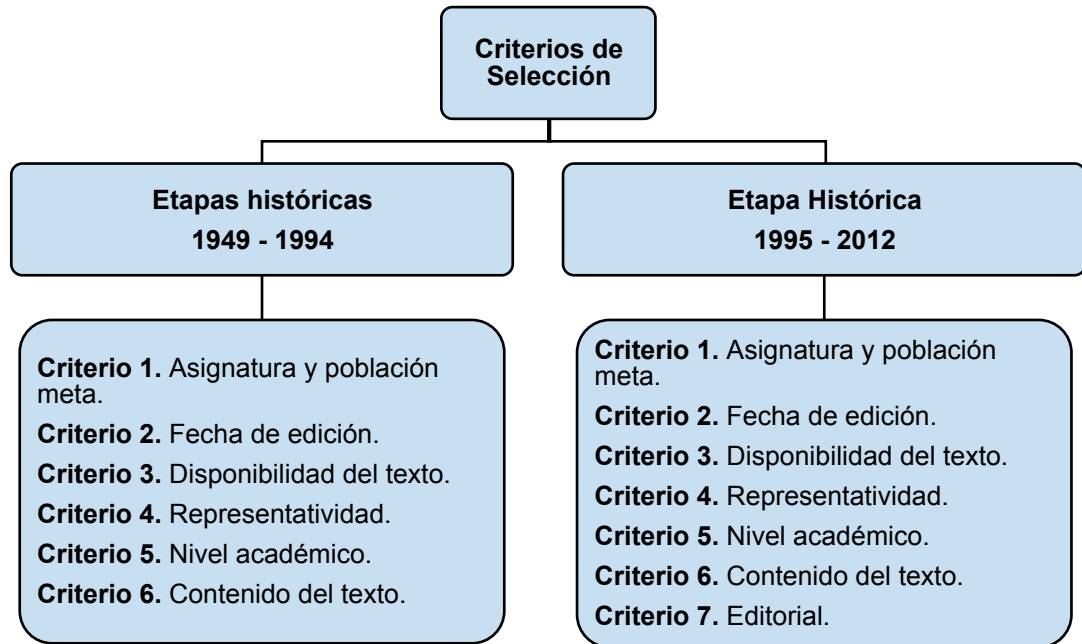
En Costa Rica, la historia de la matemática "...no ha formado parte relevante de los programas escolares, ni de las tradiciones pedagógicas" (Ministerio de Educación Pública, 2012, p. 39). La reforma curricular de 2012, presenta la historia como un eje disciplinar y reconoce su uso como recurso metodológico para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de las oportunidades didácticas especiales que proporciona. Esto ha promovido estudiar el tratamiento dado a la historia de la matemática en libros de texto en educación secundaria en Costa Rica, en un periodo posterior a la reforma que permita identificar y establecer características de su uso.

■ METODOLOGÍA

El estudio se enmarca dentro de las investigaciones cualitativas descriptivas en Educación Matemática, particularmente en las investigaciones históricas. Se diseñó en cinco fases Picado (2012). Primero, el planteamiento de la investigación. Segundo, la selección de las fuentes de información. En esta fase, se consideró la búsqueda, localización y revisión de programas y planes de estudio y libros de texto de matemática para la educación secundaria en el período descrito. También, se definieron criterios para seleccionar los libros de texto sometidos a análisis; entre estos: año de edición, representatividad en el periodo, contenido y nivel académico. Tercero, se analizaron las fuentes seleccionadas. Se ha considerado el Análisis Didáctico como técnica para estudiar los libros de texto seleccionados mediante la adaptación y definición de categorías y sus respectivas unidades de análisis (Picado, 2012; Picado, Rico y Gómez, 2013). Algunas categorías de análisis utilizadas son conceptos, representaciones, contextos, tareas de aprendizaje y materiales para la enseñanza. El análisis consistió en enfocar los vínculos entre aquellos aspectos históricos y los conceptos y procedimientos matemáticos mostrados en los libros de texto. En la cuarta fase se describieron los datos obtenidos y se establecieron los resultados del estudio. Finalmente, como quinta fase, se divulgan los resultados.

Se destaca que las principales fuentes de estudio correspondieron a los libros de texto recolectados en diferentes centros de documentación, como bibliotecas de centros de estudios o bibliotecas personales de docentes, además, en bibliotecas públicas ubicadas en diferentes zonas de Costa Rica. En el proceso de selección de las fuentes, se realizó en dos etapas, primeramente, se tuvo una lista de más de 100 fuentes posibles a analizar, las cuales se sometieron a la revisión y filtros establecidos por los criterios establecidos y así llegar a la lista final de 20 libro de texto. En la figura 1, se describen estos criterios de selección.

Figura 1. Esquema sobre criterios de selección de para los textos



Fuente: Castro, Cortés, Guzmán, Lezcano. Mora y Rosales (2015, p. 59)

En la tabla 1, se describen las diferentes fuentes analizadas, de las cuales se citan el autor y título de la obra, asimismo, se organiza la información de acuerdo a la etapa histórica a la que pertenecen.

Tabla 1. Libros de texto por etapas históricas.

Etapa Histórica	Libro	Autor
1949 – 1963	Lecciones de Matemáticas para I año	Alfaro Sagot, Bernardo.
	Lecciones de Matemáticas para II año	Fernández Alfaro, Mario.
	Matemática para la escuela secundaria	Stanford Junior University
	Lecciones de Matemáticas para IV año	Fernández Alfaro, Mario.
	Lecciones de Matemáticas para V año	Fernández Alfaro, Mario.
1964 – 1979	Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media Libro Primero	Alfaro Sagot, Bernardo.
	Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media Libro Segundo primera parte	Alfaro Sagot, Bernardo.
	Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media Libro Tercero Capítulo 2	Alfaro Sagot, Bernardo.

Etapa Histórica	Libro	Autor
	Matemática décimo año	Chaverri, G., Calvo, M. y Ramírez, F.
	Matemática 5 Geometría	Montero, B y Calvo, M.
1980 – 1994	Matemática Activa 7°	Bolaños, G; Ríos, M. y Magallón, F.
	Matemática elemental: octavo año	Barahona, M.; Rodríguez, P.
	Matemática elemental 9°	Barahona, M.; Rodríguez, P.
	Matemática 10° año	Castellón, M., Camacho, O. Aguilar, J.
	Matemática Elemental 11° año	Barahona, M.
1995 – 2012	Matemática 7° enseñanza-aprendizaje	Meneses Rodríguez, Roxana.
	Matemáticas 8°	Arias Chavarría, Alejandro.
	Matemáticas 9°	Tsijli Angelaki, Teodora.
	Manual de ejercicios matemáticos 10° año	Aguilar Camacho, Alonso.
	Matemáticas 11°	Porras, V y Gamboa, G.

Fuente: Castro, Cortés, Guzmán, Lezcano. Mora y Rosales (2015, p. 60)

■ RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Se destaca que usualmente los autores de los libros de texto analizados, al incluir aspectos de la historia de la matemática, los incluyen como parte de las introducciones a los capítulos o temas que deben ser estudiados de acuerdo con las normativas curriculares vigentes. También, una parte importante de conceptos vinculados con la historia de la matemática pertenecen a la Aritmética y la Geometría. Entre estos, número, número decimal, número negativo, número primo, multiplicación, triángulo rectángulo, radio, diámetro, área y círculo. Mientras que en el caso de la Estadística y la Trigonometría son de las áreas en las que prácticamente la presencia de conceptos vinculados con la historia de la matemática es nula.

En la tabla 2, se muestran los diferentes conceptos matemáticos que se asociaron con historia de la matemática dentro de las fuentes analizadas, estos conceptos se organizan de acuerdo a la etapa histórica y nivel académico a la que pertenecen.

Tabla 2. Conceptos Matemáticos con vínculo histórico.

Etapa I	Etapa II	Etapa III	Etapa IV
PRIMER AÑO			
Números, cifra, números primos, factores, divisores, multiplicación, división, medidas, unidad de medida, longitud, volumen, superficie, capacidad	Cantidad, número, representación numérica, número primo, número racional, razones y proporciones, operaciones básicas. Incógnita, variable, constante	Número negativo, número natural, suma, número perfecto, número racional, decimal, número irracional, medida, distancia, número primo, número, divisores, múltiplos y factor, número cuadrado, potencia, “mayor que”, “menor que”, cantidad geométrica, punto, rectángulo, unidad, lados, longitud	Sistema de numeración, símbolo matemático, número, número natural, número entero, número primo, número compuesto, número rectangular, número cuadrado perfecto, número infinito, números pares e impares, fracción positiva, conjunto, conjunto infinito, medida, suma, resta, multiplicación, división, potencia, cuadrado de un número exponente (negativos y fraccionarios), base, radical, raíz cuadrada, raíz cúbica, densidad, segmento, ángulo, recta, rectas paralelas, círculo, circunferencia, longitud, triángulo, cuadrado, esfera ángulo, cuadrado, volumen, arista, cubo, dato
SEGUNDO AÑO			
Punto, recta, rectas paralelas	Diagrama de Euler, número euleriano, Constante Euleriana, Ecuación de Euler, línea de Euler y Variables Euleriana, número, números racionales, números infinito, número pi, número algebraicos, fracciones periódicas, conjunto, conjunto no numerable, cálculo, infinito, perímetro, área,	Área, círculo, radio, diámetro, fracción, lado, triángulo, cuadrado, triángulo rectángulo, cateto, hipotenusa, rectángulo, diámetro, altura, volumen, cilindro circular recto, cubo, círculo, longitud, perímetro, trapecio, circunferencia, ángulo, semejanza, proporcionalidad, polígonos, sólidos, fracción, decimal, división, multiplicación, sistema de numeración, raíz cuadrada y raíz cúbica, número, número natural, número	Semejanza, pirámide, altura, apotema, triángulo isósceles, triángulo rectángulo, triángulo, base, ecuación, razones iguales, proporción, lugar geométrico, ecuación de primero y segundo grado, sistema de ecuaciones, número, número positivo y negativo. Constante, variable, incógnita

	volumen, esfera, sistema geométrico	negativo, número racional, contar, medida, suma, resta, distancia, potencia, expresión algebraica, variable, coeficiente numérico, factor literal, porcentaje	
TERCER AÑO			
Teorema de Pitágoras, cateto, hipotenusa, medida, aproximación, número irracional, radical, arista, pulgada, potencia, triángulo rectángulo, ángulo, ángulo recto	Triángulo rectángulo, ángulo, distancia, medida, segmento, perpendicularidad, rectas paralelas, segmentos congruentes, secante, semejanza de triángulos	Número, operaciones básicas, radical, número racional, irracional y número real. Incógnita, Ecuación, Triángulo rectángulo, ángulo, ángulo recto, ángulo agudo, cateto, hipotenusa, cuadrado y potencia, triángulo pitagórico, secciones cónicas, gráfico de funciones, razones trigonométricas, coordenadas rectangulares. Variable dependiente e independiente	Altura, hipotenusa, triángulo rectángulo, triángulo isósceles, cateto, pirámide, apotema, base, triángulo, triángulos semejantes, distancia, diámetro, arco, área, suma, ángulos opuestos por el vértice, vértice, ángulo, ángulo inscrito, semicircunferencia, ángulo recto, algoritmo, multiplicación, raíz cuadrada, segmento, círculo, radio, punto, resta, división, producto, perímetro, número (primo, perfecto, compuesto, impar, irracional, racional, natural), número π , cuadrado de un número, sector parabólico, parábola, coordenada cartesiana, sistema de dos ecuaciones, ecuación, cifra, fracción, rectas paralelas, recta secante, ángulo entre rectas paralelas, ángulo agudo, Terna pitagórica
CUARTO AÑO			
Infinito, número inconmensurable, número decimal, logaritmo, base de numeración	Logaritmo, logaritmo neperiano, número, Número irracional, número e , función logarítmica y exponencial, logaritmo de base 10, base, potencia	Relación, función (como correspondencia entre dos conjuntos), dominio, codominio, ámbito, imagen, preimagen, gráfico, conjuntos, par ordenado, punto de intersección, función lineal, pendiente	Ecuaciones, logaritmos, función exponencial, imagen, preimagen, dominio, ámbito, punto de intersección, gráfico, gráfica

QUINTO AÑO			
Pirámide, base, cuadrado, arista lateral, volumen, triángulo rectángulo, triángulo isósceles y altura	Triángulo rectángulo, cateto, ángulo recto, ángulo, hipotenusa, cuadrado, potencia, número entero, número entero positivo, número natural, número irracional, número π y cifra decimal	Círculo, circunferencia, área y longitud de la circunferencia, radio, diámetro, número, número irracional, número π , diámetro, polígono regular inscrito y circunscrito, ángulo, grado, medida, división, ángulos internos y externos de un polígono regular, razón, lados de un polígono, función, función trigonométrica	Distancia, proporción, medida, sistema numérico sexagesimal, número complejo, ángulo, grado, triángulo, ángulo central, circunferencia, radio, volumen, esfera, cilindro circular recto, triángulo plano y esférico, función seno, función trigonométrica, tangente, secante

Fuente: Castro, Cortés, Guzmán, Lezcano. Mora y Rosales (2015, p. 197)

Por otra parte, para la presentación de conceptos matemáticos abordados desde la Historia de la Matemática se recurre a la representación verbal, la cual, en los libros de texto analizados, se evidencia el medio más frecuente para presentar conceptos asociados a datos históricos, identificados fundamentalmente en las introducciones a capítulos o en el abordaje de determinados temas. Estos conceptos, además de estar inmersos en contextos matemáticos, se muestran enlazados a otros contextos como el científico y el comercial. A pesar que la normativa curricular propone la utilización de la historia desde 1964, su uso se comenzó a notar desde los libros editados en 1949 y a partir de ahí se presenta un auge progresivo según la etapa histórica. De la misma manera, los libros de texto de educación matemática para la Educación General Básica (EGB), es decir, los libros para primer, segundo y tercer año de la educación secundaria costarricense, resultan los documentos que incorporan mayormente el uso del recurso histórico.

El estudio ha permitido definir cuatro etapas históricas en la educación costarricense dentro del período considerado. Esta división temporal ha considerado factores sociales, políticos, económicos y educativos, así como la aplicación del análisis didáctico como técnica para el estudio de libros de texto históricos.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguilar, A. (2008). *Manual de Ejercicios Matemáticos 10° Año*. (1ª ed). San José: Editorial Káñir.
- Alfaro, B. (1965). *Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media. Segundo Libro. Primera Parte*. (1ª ed). San José: Editorial BAS.
- Alfaro, B. (1966). *Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media. Libro Tercero*. San José, Costa Rica: Editorial BAS.
- Alfaro, B. (1966). *Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media Segundo Libro. Segunda Parte*. (1ª ed). San José: Editorial BAS.

- Arias C., A. (2011). *Matemática 8*. (1ª ed). San José: Grupo Nación GN S.A.
- Babini, J. y Pastor, J. (1997). *Historia de la Matemática*. Barcelona: Gedisa.
- Barahona, M. y Rodríguez, P. (1987). *Matemática Elemental 8º año*. (1ª ed). San José: Alma Máter.
- Barahona, M. y Rodríguez, P. (1990). *Matemática Elemental 9º año*. San José: Ediciones Guayacán.
- Barahona, M., M. (1989). *Matemática elemental 11º año*. (1ª ed). San José: Ediciones Guayacán.
- Bell, E. T. (1992). *Historia de las matemáticas* (R. Ortiz, Trad.). CDMX: Fondo de Cultura Económica.
- Bolaños, G. y Ríos M. (1992). *Matemática Activa 7º*. (2ª ed). San José: Textos Modernos Catleya.
- Boyer, C. (2003). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.
- Castellón, M.; Camacho, O. y Aguilar, J. (1980). *Matemática 10º Año*. San José: Lehmann Editores.
- Castro, L., Cortés, P., Guzmán, R., Lezcano, N., Mora, G. y Rosales, N. (2015). *La Historia de la Matemática en el currículo de matemáticas de Educación Secundaria en Costa Rica (1949-2012)*. (Tesis licenciatura). Universidad de Costa Rica, San José.
- Chaverri, G., Ramírez, F. y Calvo, M. (1975). *Matemática 10º Año*. San José: Litografía Ambar S.A.
- Farmaki, V., Klaudatos, N. y Paschos, T. (2004). Integrating the history of mathematics in educational praxis. En M. J. Høines and A. B. Fuglestad (Eds.), *A Euclidean geometry approach to the solution of motion problems*. PME 28. Vol. 3 (pp. 505-512). Bergen: PME.
- Fauvel, J. y Gray, J. (1991). *The history of mathematics: a reader*. Hong Kong: Macmillan Press-The Open University.
- Fernández, M. (1956). *Lecciones de Matemática para cuarto año*. San José: BAS.
- Fernández, M. (1956). *Lecciones de Matemática para segundo año*. San José: BAS.
- Fernández, M. (1959). *Lecciones de Matemática para primer año*. San José: BAS.
- Fernández, M. (1960). *Lecciones de Matemática para quinto año*. San José: BAS.
- Grupo de estudio de la matemática escolar. (1963). *Matemática para la escuela secundaria*. Stanford Junior University.
- Meneses, R. (1996). *Matemática 7º año*. (3ª ed). San José: Editorial Norma.
- Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de Estudio. Matemática*. San José: MEP.
- Montero, B; Calvo, M; Jiménez, F; Ramírez, F y Azofeifa, I. (1968). *Matemática 5 Geometría*. San José: [s.n].
- Picado, M. (2012). *El sistema métrico decimal en libros de texto de matemática en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)* (Tesis doctoral), Universidad de Granada, España. Recuperado en http://fqm193.ugr.es/produccioncientifica/tesis/ver_detalle/7464/
- Picado, M.; Gómez, B. y Rico, L. (2013). El análisis didáctico en el estudio del sistema métrico decimal en un libro de texto histórico de matemáticas. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina

(Eds.). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, Formación de Profesores e innovación curricular* (pp. 403-414). Granada: Comares.

Porras, V y Gamboa, G. (2010). *Matemáticas 11°*. San José: Litografía e Imprenta Universal S.A.

Tsijli, A., T. (1997). *Matemática 9*. (1ª ed). San José: EUCR